

Metropole Bac maths 2024

EXERCICE 4

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. On considère ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
f	5		3	1
		$-\infty$		

a. Affirmation 1 :

La droite d'équation $y = -2$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f .

Lorsque $x \rightarrow -2^-$, $y \rightarrow -\infty$

Lorsque $x \rightarrow -2^+$, $y \rightarrow -\infty$

La droite d'équation $x = -2$ est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction

Les droites d'équation $y = 5$ et $y = 1$ sont asymptotes horizontales.

Affirmation 1 : Fausse

b. Affirmation 2 : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{f(x) - 5} = +\infty$.

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$f(x) - 5$	0		-2	-4
		$-\infty$		
$\frac{2}{f(x) - 5}$		0	-1	-0.5
	$-\infty$			

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{f(x) - 5} \right) = -\infty$

Affirmation 2 : Fausse

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x e^{-x}$.

a. Affirmation 3 :

Le point $A\left(2; \frac{2}{e^2}\right)$ est l'unique point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_g$ de la fonction g .

$$g(x) = x e^{-x} \text{ est de la forme } u(x)v(x) \quad u(x) = x \quad u'(x) = 1$$

$$v(x) = e^{-x} \quad v'(x) = -e^{-x} \quad g'(x) = e^{-x} - x e^{-x}$$

$$g''(x) = -e^{-x} - (e^{-x} - x e^{-x}) \quad g''(x) = -2e^{-x} + x e^{-x}$$

$$g''(x) = e^{-x} (x - 2) \quad g''(x) \text{ change de signe pour } x = 2 \text{ et}$$

uniquement pour $x = 2$ alors $g(2) = 2e^{-2} = \frac{2}{e^2}$

Affirmation 3 : Vraie

b. Affirmation 4 :

Pour tout nombre réel x appartenant à $] -\infty; 2[$, on a $g(x) \leq x$.

$$g(x) = x e^{-x} \quad \text{Soit} \quad g(x) - x = x(e^{-x} - 1)$$

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$
e^{-x}	$+\infty$	$+$	1	$+$	$\rightarrow 0$
$e^{-x} - 1$	$+\infty$	$+$	0	$-$	$\rightarrow -1$
x	$-\infty$	$-$	0	$+$	$\rightarrow +\infty$
$g(x) - x$		$-$	0	$-$	

On a constamment $g(x) - x < 0$ sauf pour $x = 0$
 cad $g(x) < x$ sauf pour $x = 0$ auquel cas $g(x) = x$

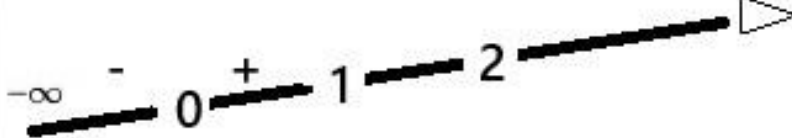
Affirmation 4 : Vraie

3. Affirmation 5 :

L'équation $x \ln(x) = 1$ admet exactement deux solutions sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

$f(x) = x \ln(x)$ est de la forme $u(x)v(x)$ avec $u(x) = x$ $u'(x) = 1$
 $v(x) = \ln(x)$ $v'(x) = \frac{1}{x}$

$f'(x) = \ln(x) + 1$ La fonction $\ln(x)$ est définie, croissante et continue pour $x > 0$

x	0	$1/e$	1	e	$+\infty$
$f'(x)$					
$f(x)$					

La fonction $\ln(x)$ est définie, croissante et continue pour $x > 0$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, elle passe 1 fois et 1 fois seulement par la valeur 1 dans cet intervalle

Affirmation 5 : Fausse